Leçon 228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

1 Définitions et premières propriétés (Rombaldi)

1.1 Continuité

- Définition continuité en un point puis un ensemble + exemple
- Si f continue, bornée localement
- Caractérisation avec limite à gauche/droite + séquentielle + topologique
- Opération sur les fonctions continues
- Continuité uniforme + Théorème de Heine
- Théorème bornes atteintes

1.2 Dérivabilité

- Définition
- Si dérivable alors continue
- Réciproque fausse
- Définition de la fonction dérivée
- Fonction $\mathcal{C}^n$
- Opération sur les fonctions dérivables
- Implications sur les variations d'une fonction (si $f' \leq g'$ etc.)

2 Stabilité des notions

2.1 Pour la continuité

- Une suite de fonctions continues sur un intervalle qui converge uniformément est continue + contre-exemple de x^n
- Si l'on muni $\mathcal{C}^0(I)$ de la convergence uniforme, il est complet
- Dév 1 : Weierstrass par la convolution

2.2 Pour la dérivabilité

- Les deux critères pour qu'une limite de dérivables le soit (les dérivées bornées et la convergence ponctuelle en un point)
- Dév 2 : Étude de la fonction de Weierstrass

3 Théorèmes importants (Rombaldi)

- TVI + application (les polynômes de degré impaires admettent une racine par exemple)
- Rolle + version multiple
- Application : Théorème de Darboux, majoration de l'erreur des interpolations de Lagrange
- Accroissements finis (théorème + inégalité)
- Application : sens de variation d'une fonction + théorème fondamental de l'analyse